24/3/2017

Πρόταση: Έστω $(G, \circ)$ μια ομάδα πεπερασμένη και $|G| = 2n$ όπου $n \geq 1$. Τότε υπάρχει $x \in G$, $x \neq e$: $x \circ x = e$

Απόδειξη: Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του G:

$$X = \{x \in G \setminus \{e\} \mid x \neq x^{-1}\}$$

(i) Αν $X = \emptyset$, τότε $\forall x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow x = x^{-1} \Rightarrow x \cdot x = x^{-1} \cdot x$
$\Rightarrow x \cdot x = e$

Άρα, έπεται ότι $\forall x \in G : x \cdot x = e$.

(ii) Αν $X \neq \emptyset$, τότε $\exists x \in G$ με $x \neq e : x \neq x^{-1}$. Αν $x^{-1} = e$ $\Rightarrow x \cdot x^{-1} = x \cdot e = x$ (άτοπο). Άρα $x^{-1} \in G \setminus \{e\}$ και $(x^{-1})^{-1} = x^{-1} \Rightarrow x = x^{-1}$ (άτοπο). Άρα, $(x^{-1})^{-1} \neq x^{-1}$

Άρα, $x^{-1} \in X$ και $x \neq x^{-1}$. Επομένως, δείξαμε ότι τα στοιχεία του συνόλου X εμφανίζονται ως ζεύγη

$\{x, x^{-1}\}$ με $x \neq x^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο X

έχει άρτιο πλήθος στοιχείων $\Rightarrow |X| = 2k,\ k \geq 1$

Όμως $X \subseteq G \setminus \{e\} \Rightarrow |X| = 2k \leq 2n-1 = |G \setminus \{e\}|$

$\Rightarrow 2k < 2n-1$ (το ίσο δεν ισχύει αφού ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός)

Άρα, $X \subset G \setminus \{e\}$ επομένως υπάρχει $y \in G \setminus \{e\}$ και $y \notin X$

Τότε $y \neq e$ και $y = y^{-1} \Rightarrow y \cdot y^{-1} = y \cdot y \Rightarrow y \cdot y = e$

• Ταξινόμηση ομάδων με 4 στοιχεία

Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και $|G| = 4$. Άρα, $G = \{a, b, c, e\}$

Από την πρόταση και αφού $|G| = 4$, άρτιος, έπεται ότι υπάρχει $x \in G,\ x \neq e : x \cdot x = e$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι το στοιχείο αυτό είναι το a. Άρα $a \cdot a = e$.

Πίνακες Cayley της G:

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c			

Για το στοιχείο $b \cdot b$ έχουμε τις εξής επιλογές
(1) $b \cdot b = e$
(2) $b \cdot b = a$

Επιλογή (1):

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Επειδή ο πίνακας είναι συμμετρικός άρα η ομάδα είναι αβελιανή και παρατηρούμε ότι $x \cdot x = e, \forall x \in G$

Επιλογή (2):

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

Επειδή ο πίνακας Cayley είναι συμμετρικός έπεται ότι η ομάδα είναι αβελιανή

Συνοπτικά: (1) $G = \{e, a, b, c \mid a \cdot b = b \cdot b = c \cdot c = e \cdot e = e\}$ αβελιανή

(2) $e, b \in G$, $b \cdot b = a$, $b \cdot b \cdot b = a \cdot b = c$. Άρα

$G = \{e, b \cdot b, b, b \cdot b \cdot b\}$, αβελιανή. Άρα οι δυνάμεις του b επαναλαμβάνονται ανά τέσσερα βήματα.

Επειδή κάθε (πεπερασμένη) ομάδα καθορίζεται πλήρως από τον πίνακα Cayley η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι ακριβώς δυο μη-ισόμορφες (διαφορετικές) ομάδες με 4-στοιχεία.

(1) Η ομάδα του Klein (επιλογή (1))

(2) Η κυκλική ομάδα με 4 στοιχεία (επιλογή (2))

(2) Μοντέλο ομάδας με 4-στοιχεία που είναι κυκλική

• $(Z_4,+)$. Πράγματι

$$[1]_4+[0]_4=[1]_4$$
$$[1]_4+[1]_4=[2]_4$$
$$[1]_4+[2]_4=[3]_4$$
$$[1]_4+[3]_4=[0]_4$$

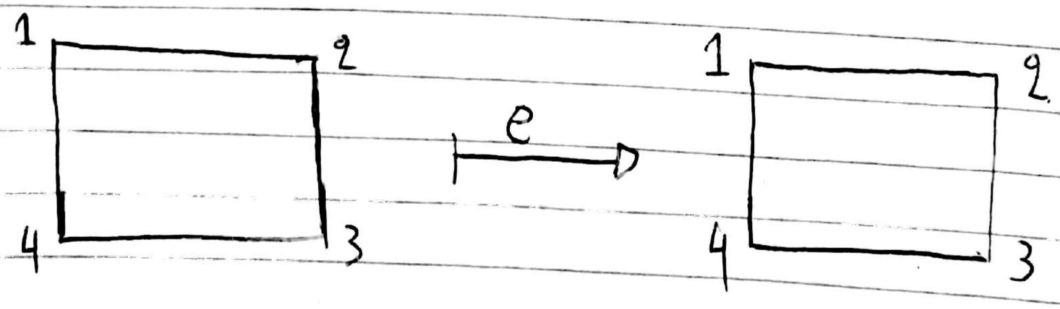
• $(U_4,\cdot)$ και $U_4=\{z\in\mathbb{C} \mid z^4=1\}=\{1,-1,i,-i\}$

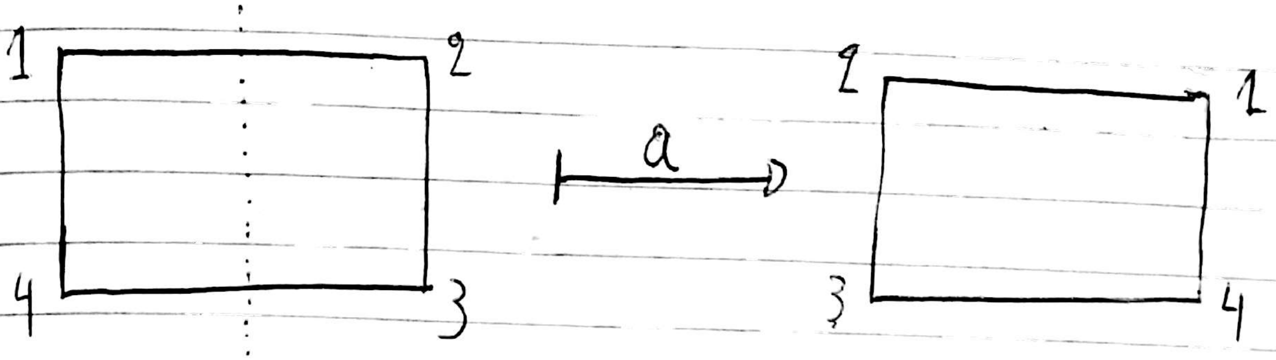
$i\in U_4$, $i\cdot i=i^2=-1$

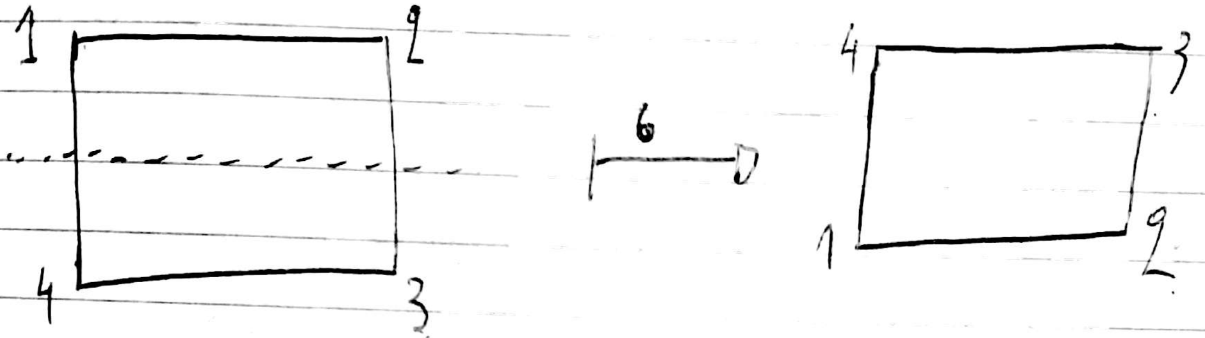
$i\cdot i\cdot i=i^3=-i$

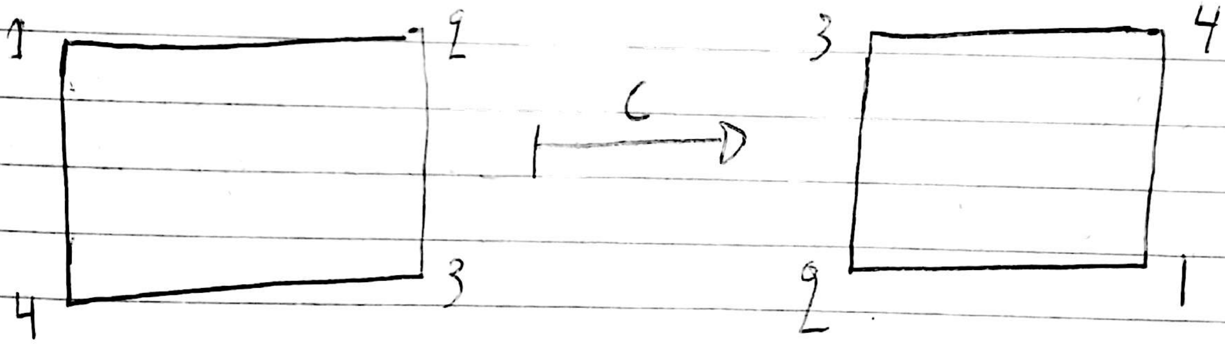
$i^4=1$

Άρα, οι ομάδες $(Z_4,+)$ και $(U_4,\cdot)$ είναι ισόμορφες









Έχουμε $a\cdot a = b\cdot b = c\cdot c = e\cdot e = e \Rightarrow G=\{e,a,b,c\}$: μοντέλο της ομάδας του Klein

• Ευθύ γινόμενο ομάδων

Έστω $(G_1,\cdot)$, $(G_2,\cdot)$ ομάδες. Στο καρτεσιανό γινόμενο $G_1\times G_2$ ορίζουμε πράξη $\cdot$ ως εξής: $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1\cdot x_2\,,\ y_1\cdot y_2)$

Πρόταση: Το ζεύγος $(G_1 \times G_2, \bullet)$ είναι ομάδα η οποία καλείται ευθύ γινόμενο των G_1, G_2. Επιπλέον, η ομάδα $(G_1 \times G_2, \bullet)$ είναι αβελιανή αν-ν και οι δυο είναι αβελιανές (όμοια $G_1 \times G_2$ πεπερασμένη αν-ν G_1, G_2 πεπερασμένες)

Απόδειξη: • Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in G_1 \times G_2$

$$(x_1, y_1) \bullet [(x_2, y_2) \bullet (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) \bullet (x_2 \bullet x_3, y_2 \cdot y_3)$$

$$= (x_1 \bullet (x_2 \bullet x_3), y_1 \cdot (y_2 \cdot y_3)) = ((x_1 \bullet x_2) \bullet x_3, (y_1 \cdot y_2) \cdot y_3)$$
$$= (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \bullet (x_3, y_3)$$

Άρα η $\bullet$ είναι προσεταιριστική.

• Έστω e_1: το ουδέτερο στοιχείο της G_1
Έστω e_2: το ουδέτερο στοιχείο της G_2

Άρα, το (e_1, e_2) είναι ουδέτερο για την πράξη $\bullet$ στο $G_1 \times G_2$

• $\forall (x, y) \in G_1 \times G_2$. Ζητάμε $(z, w) \in G_1 \times G_2$ ώστε

$$(x, y) \bullet (z, w) = (e_1, e_2) = (z, w) \bullet (x, y)$$

$$\Rightarrow (x \cdot z, y \bullet w) = (e_1, e_2) = (z \cdot x, w \bullet y)$$

Άρα, $x \bullet z = e_1 = z \bullet x \Rightarrow z = x^{-1}$
$y \bullet w = e_2 = w \bullet y \Rightarrow w = y^{-1}$

Αντίστροφα, $(x,y)\cdot(x^{-1},y^{-1}) = (e_1,e_2) = (x^{-1},y^{-1})\cdot(x,y)$

Επομένως $(x,y)^{-1} = (x^{-1},y^{-1})$

Άρα, τελικά $(G_1 \times G_2, \cdot)$ ομάδα.

Παράδειγμα: Έστω η ομάδα $(\mathbb{Z}_2,+)$ και θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+)$ όπου $([a]_2,[b]_2)+([c]_2,[d]_2)$

$$= ([a]_2+[c]_2, [b]_2+[d]_2) = ([a+c]_2, [b+d]_2)$$

Ουδέτερο στοιχείο είναι το $([0]_2,[0]_2)$. Τότε $\forall ([a]_2,[b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

ώστε $([a]_2,[b]_2)+([a]_2,[b]_2) = ([2a]_2,[2b]_2)$
$= ([0]_2,[0]_2)$

Άρα, η ομάδα $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα του Klein.

Παράδειγμα: $(U_2,\cdot)$ $U_2 = \{1,-1\} \in \mathbb{C}$ Τότε $(U_2 \times U_2,\cdot)$ είναι μια ομάδα του Klein

Αφού $U_2 \times U_2 = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$

• Συμμετρικές ομάδες

Αν $X \neq \emptyset$, τότε: $(S(X), \circ)$ η ομάδα μεταθέσεων του X

όπου $S(X) = \{ f: X \to X \mid f: 1-1$ και επί$\}$, $\circ$: σύνθεση

απεικονίσεων. (Γνωρίζουμε ότι $S(X)$: αβελιανή αν-ν $|X| = 2$)

Αν $X = \{1, 2, \dots, n\}$ τότε $S(X) := S_n$ και η ομάδα

μεταθέσεων $(S_n, \circ)$ καλείται n-οστή συμμετρική ομάδα

και τότε S_n: αβελιανή $\iff n = 1$ ή $n = 2$

Πρόταση: $|S_n| = n!$

Απόδειξη: Έστω $\sigma \in S_n$, άρα $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$

με $\underline{\sigma \; 1-1 \text{ και επί}}$

Για το $\sigma(1)$ έχουμε $\boxed{n}$ επιλογές: $1, 2, \dots, n$. Σταθεροποιούμε

μια επιλογή. Τότε για το $\sigma(2)$ έχουμε τις επιλογές

$\{1, 2, \dots, n\} \setminus \sigma(1)$ οι οποίες είναι σε πλήθος $\boxed{n-1}$

Σταθεροποιώντας τις τιμές $\sigma(1), \sigma(2)$ για το $\sigma(3)$ έχουμε

τις επιλογές $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$ οι οποίες είναι $n-2$

⋮

Σταθεροποιώντας τις τιμές $\sigma(1), \sigma(2) \dots \sigma(n-1)$

για το $\sigma(n)$ έχουμε την επιλογή $\{1,2,\dots,n\} \setminus \{\sigma(1),\dots,\sigma(n-1)\}$

Άρα, για το σ έχουμε $n(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ επιλογές

Επομένως, $|S_n| = n!$

Θεωρούμε τη συμμετρική ομάδα $(S_n,\circ)$, $n\geq 1$. Θεωρούμε μια μετάθεση $\sigma\in S_n$. Τότε

$$\sigma \begin{array}{|c} 1 \quad 2 \ \cdots \ n \\ \hline \underbrace{\sigma(1) \quad \sigma(2) \ \cdots \ \sigma(n)}_{\text{τα στοιχεία } \{1,2,\dots,n\} \text{ ενδεχομένως με άλλη σειρά}} \end{array}$$

Η μετάθεση σ θα συμβολίζεται με έναν $2\times n$ - πίνακα

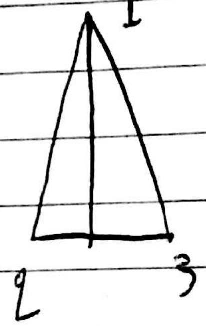
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(i) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα:
- $n=1$, $S_1 = \left\{ i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $n=2$, $S_2 = \left\{ i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
- $n=3$, $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

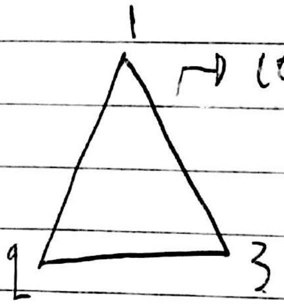
• $n=1$ (τετριμμένη περίπτωση)

• $n=2$



Η ομάδα συμμετριών του ισοσκελούς αλλά όχι ισόπλευρου τριγώνου είναι $\left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} \right\}$

$n=3$



→ ισόπλευρο